単体的三次元球面の組合せ分割と結び目の橋指数 (凸多面体を巡る組合わせ論の代数的諸相)

八森, 正泰

数理解析研究所講究録
1175巻 2000年 31-50

単体的三次元球面の組合せ分割と結び目の橋指数

東京大学大学院 総合文化研究科
広域科学専攻 広域システム科学系

八森正泰 (Masahiro Hachimori)

1 イントロダクション
— 構成可能性と組合せ分割の階層

本稿では単体的複体の組合せ分割の中でも構成可能性を題材にとり、構成可能でないような例をどのように作ることができるかということを紹介したい。特に取り上げるのは構成可能でないような3次元球面の三角形分割で、その構築にはサイズが小さく橋指数の大きいような結び目の埋め込みを利用する。また、3次元についての結果を高次元に拡張する方法についても紹介する。本稿はEhrenborg&Hachimori[9]の結果の紹介である。

本稿で扱うのは単体的複体の組合せ的な分割についての性質であるので、まず単体的複体の定義を述べておく。

定義 1.1. (単体的複体)
単体的複体 (simplicial complex) C とは E^N 中の有限個の単体の集合で、

- $\sigma \in C$ ならば σ のすべての面も C の要素である。
- $\sigma, \tau \in C$ ならば、$\sigma \cap \tau$ は σ と τ の両方の面である。

という二つの条件を満たすもののことである。

ただし、ここでは空集合 $\emptyset$ は任意の単体の -1 次元の面と考えているので、非空な単体的複体は必ず $\emptyset$ を要素に持つことに注意しておく。この定義の中で「単体」をすべて「凸多面体」に置き換えたものが多面体的複体である。

単体的複体の要素の中で、0次元のものは**頂点** (vertex)、1次元のものは**辺** (edge)、そして、包含関係で極大なものは**ファセット** (facet) と呼ばれている。また、ファセットの次元の最大のものが単体的複体の**次元**である。単体的複体ですべてのファセットの次元が等しいようなものは**純** (pure) であるといわれる。本稿では基本的にこの純な単体的複体を対象とする。

単体的複体 C に対して $|C| = \bigcup_{\sigma \in C} \sigma$ を C の**幾何学的実現** (geometric realization) という。特に $|C|$ が多様体 M と同相である時、C は M の**三角形分割** (triangulation) と呼ばれる。

さて、この稿で主に考えたいのは次の構成可能性という概念である。

定義 1.2. (構成可能性)

(i) 単体 (d 次元単体とそのすべての面からなる単体的複体) は**構成可能** (constructible) であると定義する。

(ii) 二つの d 次元の単体的複体 C_1 と C_2 が共に構成可能で、さらに $C_1 \cap C_2$ が $d-1$ 次元で構成可能である時、$C := C_1 \cup C_2$ は構成可能であると定義する。

特に構成可能な単体的複体は純であることが簡単に確かめられる。

この概念は Hochster[16] によって最初に定式化されたものであるが、同様の考え方はもっと古い組合せトポロジーにおける PL 球体・球面の構成法の中にも見られる (e.g., Zeeman[25])。この構成可能性という概念は単体的複体を組合せ的な条件で分割することができるかどうか、という概念であり、この種の概念を総じて「組合せ分割」 (combinatorial decomposition property) と呼んでいる。

構成可能性の解釈としては二通りあり、一つはシェラブルという概念の拡張という見方、もう一つは組合せ的に構成できる Cohen-Macaulay 単体的複体のサブクラスという見方である。

1.1 構成可能性 vs シェラビリティー、凸多面体

シェラブルという概念は Bing[1] にも見られるように古くは組合せトポロジーにおいてその性質が論じられてきた概念であるが、そのさらに前には Schläfli の 1852 年の凸多面体の研究の中で凸多面体の境界のなす多面体的複体が満たす性質として (証明抜きで) 仮定されており、この事実を証明しなおした Bruggesser&Mani[6] およびそれを利用して「上限定理」を証明した McMullen[15] でその重要性が広く認識されるに至り、現在では凸多面体の研究はもとより、半順序集合や単体的複体一般の組合せ構造やトポロジーを論じる上で重要なツールの一つとなっている。(詳しい背景については Björner[3] や Ziegler[26] などを参照されたい。)

さて、このシェラブルという概念であるが、実際は多面体的複体や正則セル複体について定義することができ (e.g., Björner[2])、さらには純でない複体についても定義して議論を進められているのであるが (Björner&Wachs[4, 5])、ここでは純な単体的複体に特化した場合の定義で紹介する。

定義 1.3. (シェラビリティー)
d 次元の純な単体的複体 C のファセットを $F_1, F_2, \ldots, F_t$ という順に並べ、各 $j \geq 2$ について $(F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}) \cap F_j$ が $d-1$ 次元でシェラブルになっているようにできるとき、C はシェラブル (shellable) であるという。
このファセットの並べ方をシェリング (shelling) という。

(単体 (ファセットが一つ) の場合は自動的に定義を満たしているのでシェラブルであり、特に -1 次元の単体的複体 $\{\emptyset\}$ はシェラブルである。このシェラビリティーの定義は次元に関して再帰的になっており、-1 次元の単体的複体 $\{\emptyset\}$ がシェラブルであることが再帰の出発点になる。)

この定義を眺めてみると、定義中の各 j に対して $(F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1})$ という部分がどの j についても定義の条件を満たすことに気付くであろう。これに着目してより再帰性を強調する形で次のように書き換えることができる。

定義 1.4. (再帰的なシェラビリティーの定義)

(i) 単体はシェラブルであると定義する。

(ii) d 次元の単体的複体 C_1 と d 次元の単体 C_2 に対して、もし C_1 がシェラブルであり、かつ、$C_1 \cap C_2$ が $d-1$ 次元でシェラブルであったら、$C := C_1 \cup C_2$ はシェラブルであると定義する。

これが上のもとの定義と等価であることは簡単に確かめられる。

こうして再帰的に書き換えてみると、初めに紹介した構成可能性の定義1.2と非常に似ていることに気付く。実際、定義 1.2において C_2 を単体に制限すればそのままシェラブルの定義になってしまうのである。すなわち、

$$\text{シェラブル} \Longrightarrow \text{構成可能}$$

ということになっているのである。

さらに凸多面体との関連をみておくと、有名な Bruggsser&Mani の定理は次のようなものである。

定理 1.5. (Bruggesser&Mani[6])
凸多面体の境界をなす複体 (つまり、凸多面体の全体以外の面のなす複体) はシェラブルである。

この言明は「シェラブル」という概念を多面体的複体について定義して成り立つのであるが、ここでは単体的な場合についてしかシェラブルという概念を紹介していないので、凸多面体も単体的なものに限定しておく。結局次のような関係があることになった。

$$\text{単体的凸多面体の境界} \Longrightarrow \text{シェラブル} \Longrightarrow \text{構成可能}.$$

1.2 構成可能性 vs Cohen-Macaulayness

一方 Cohen-Macaulay という概念との関係の方も見てみよう。

Cohen-Macaulay な単体的複体という概念は Stanley[22] の単体的球面についての「上限定理」の証明に端を発し、シェラブルという概念同様、半順序集合や単体的複体の研究に欠かせない重要な概念の一つである。これはどういう概念であるかというと、単体的複体 C に対して体 k 上の Stanley-Reisner

環 k_C というものが定義され、この k_C が Cohen-Macaulay 環であるときに C は k 上 **Cohen-Macaulay**、任意の体上で C が Cohen-Macaulay であるときに C は **Cohen-Macaulay** である、というものである。この概念についての詳しい解説は Hibi[13, 14] および Stanley[23] などを参照されたい。

ここではここでは細かい定義には触れず、Hochster による次の命題を紹介したい。

命題 1.6. (Hochster[16])
二つの d 次元の単体的複体 C_1 と C_2 が共に Cohen-Macaulay であり、さらに $C_1 \cap C_2$ が $d-1$ 次元で Cohen-Macaulay であるなら、$C := C_1 \cup C_2$ は Cohen-Macaulay である。

この言明は構成可能性の定義と非常に似た形をしている。実際、単体は Cohen-Mcaulay であるのであるが、この事実と構成可能性の定義 1.2により、構成可能な単体的複体はすべて Cohen-Mcaulay であることを示すことができる。つまり、次の関係が成り立っているのである。

$$\text{構成可能} \Longrightarrow \text{Cohen-Macaulay.}$$

この稿では Cohen-Macaulay という性質については詳しく述べないが、Reisner[20] によってホモロジー群の言葉で特徴づけが与えられていること、さらに Munkres[18] によって Cohen-Macaulay 性が単体的複体の幾何学的実現のトポロジーによって決定されるということが示されているということについては触れておきたい。これらの結果から、たとえば多様体の三角形分割の場合にはホモロジー球面の三角形分割であることと Cohen-Macaulay であることが等価であることになる。

一方、単体的凸多面体がシェラブルであることと本稿で示す構成可能でない球面の三角形分割の存在から分かるように構成可能性やシェラビリティーはトポロジーのみによっては決定されない性質である。

1.3 擬多様体と PL 球面

1.1節で単体的凸多面体の境界がなす単体的複体について少し触れたが、これは単体的複体の中では非常に限られたクラスに属するものである。例えば次のような条件が満たされていることが簡単に確かめられる。

- 純である。凸多面体の次元を $d+1$ とするとファセットはすべて d 次元である。
- どの $d-1$ 次元の面もちょうど二つのファセットに含まれている。
- 強連結である。つまり、どの二つのファセット F, G に対しても両者をつなぐようなファセットの列 $F = F_1, F_2, \ldots, F_s = G$ を F_i と F_{i+1} がどの $1 \leq i < s$ についても共通の $d-1$ 次元の面を持つようにとれる。

この3つの条件を満たすような単体的複体は**閉擬多様体** (closed pseudomanifold) と呼ばれている。一般に**擬多様体** (pseudomanifold) とは、上の二つ目の条件を「どの $d-1$ 次元面も高々2つのファセットに含まれる」としたもののことである。

例えば (連結な) 多様体の三角形分割は擬多様体の例である。擬多様体の $d-1$ 次元の面でちょうど1つだけのファセットに属するものすべてが生成する部分複体は**境界** (boundary) と呼ばれる。これは境界のある多様体の三角形分割の場合はちょうど境界の部分に対応する。つまり、閉擬多様体というのは境界のない擬多様体のことである。

凸多面体やそれに類したものの性質を調べたいと思った場合、(閉) 擬多様体を考察の対象とするのは極めて自然なことであろう。ここで対象を擬多様体にしぼってみる。

さて、構成可能な擬多様体にはどんなものがあり得るのだろうか、ということを考えてみたいのであるが、実は構成可能性というのは非常に強いトポロジー的制約をうけていることが次の命題から分かる。

命題 1.7. (e.g., Björner[3], Zeeman[25])構成可能な d 次元の擬多様体は d 次元の PL 球体または PL 球面である。

ここで PL 球体とは幾何学的実現が単体との間に区分的線形な同相写像をもつもの、PL 球面とは幾何学的実現が単体の境界との間に区分的線形な同相写像をもつもののことである。(命題中で PL 球体であるか PL 球面であるかは擬多様体が閉であるか否か、つまり境界を持つか否かによる。)

この命題は PL トポロジーの基礎定理である次の命題を認めれば再帰的に簡単に証明することが出来る。

命題 1.8. (e.g., Zeeman[25])

- 二つの d 次元 PL 球体をその境界上の $d-1$ 次元 PL 球体で張り合わせると d 次元 PL 球体が得られる。
- 二つの d 次元 PL 球体をその全境界で張り合わせると d 次元 PL 球面が得られる。

(命題 1.7の証明)
自明に単体は PL 球体である。また、0 次元の場合に命題が成立するのも自明である。以下、次元およびファセットの数に関する帰納法を用いる。

まず、C が d 次元の構成可能な擬多様体で、単体でないとする。すると、構成可能性の定義 (定義 1.2) により、二つの構成可能な単体的複体 C_1 と C_2 に分割され、$C_1 \cap C_2$ が $d-1$ 次元の構成可能な単体的複体となっている。
(1)
C_1 と C_2 が擬多様体であることは簡単に確かめられる。なぜなら構成可能性によって純であることと強連結であることは保証され、C の部分複体であることから $d-1$ 次元面が高々2つのファセットにしかふくまれないことが分かる

からである。したがって、ファセットの数による帰納法で C_1 と C_2 は d 次元 PL 球体または PL 球面である。
(2)
$C_1 \cap C_2$ のファセットである $d-1$ 次元面は C_1 および C_2 に属しているので、C の中で高々 2 つの d 次元面にしか含まれていなかったことを考えるとそれぞれの中でちょうど 1 つの d 次元面に含まれていることになる。これは $C_1 \cap C_2$ が C_1 および C_2 の境界にあることを意味する。(従って C_1 と C_2 は PL 球面ではなく PL 球体であったことになる。) すると $C_1 \cap C_2$ は d 次元 PL 球体の境界、つまり $d-1$ 次元 PL 球面の部分複体であり、この事実と $C_1 \cap C_2$ が構成可能であることから $C_1 \cap C_2$ は擬多様体であることがわかる。従って次元に関する帰納法を用いることにより $C_1 \cap C_2$ は $d-1$ 次元の PL 球体または PL 球面である。
(3)
(1) と (2) によって、C は二つの d 次元 PL 球体を境界上の $d-1$ 次元 PL 球体または PL 球面 (つまり全境界) で張り合わせて出来ていることになるので、命題 1.8によって d 次元 PL 球体または PL 球面であることになる。 □

このようにファセットの数と次元の二つの帰納法を用いる議論は構成可能性の定義に沿っているので、構成可能性について議論する時の基本的な手法であるといえる。さらにこの事実から、次のような便利な性質が観察される。

命題 1.9. 構成可能な PL 球体または球面である C が定義 1.2のように C_1 と C_2 に分割されたとする。すると、C_1 と C_2 はともに PL 球体である。

つまり、擬多様体を仮定していると、構成可能性についての議論の中で上記のように帰納的に議論する場合に各ステップで対象が PL 球体であるという付加情報を利用することもできるのである。

1.4 閉擬多様体の階層

結局、閉擬多様体は次のような階層構造になっている。

$$
\begin{array}{c}
\text{単体的凸多面体の境界} \\
\Downarrow \\
\text{シェラブルな閉擬多様体} \\
\Downarrow \\
\text{構成可能な閉擬多様体} \\
\Downarrow \\
\text{PL 球面} \\
\Downarrow \\
\text{球面の三角形分割} \\
\Downarrow \\
\text{Cohen-Macaulay な閉擬多様体}
\end{array}
$$

この各階層は2次元の場合にはすべて等価になることが知られている。なぜなら、Steinitzの定理 (e.g., Ziegler[26]) によって2次元球面の三角形分割はすべて3次元凸多面体の境界として実現でき、また、閉曲面の分類定理とReisner[20] のCohen-Macaulay性の特徴づけからCohen-Macaulayな2次元閉曲面は球面のみであることがわかるからである。

しかし、3次元以上になると各階層間にはそれぞれギャップが生じることになる。例えば、

- Barnetteの球面 (e.g., Ziegler[26]) は凸多面体の境界としては実現されない3次元球面であるが、シェラブルである。
- ポアンカレの3次元ホモロジー球面 (e.g., 田村 [24]) は球面ではないが球面と同じホモロジー群を持っており、特にCohen-Macaulayであるのに球面ではない例となる。
- 5次元以上の場合、PLでない球面が存在することが知られている (e.g., Edwards[8], Cannon[7])。ただし、3次元以下ではすべての球面がPLである。(4次元は未解決。)
- シェラブルでなくて構成可能であるような閉擬多様体の例はまだ知られていない。しかし、閉でない例であればZieglerの3次元球体、Grünbaumの3次元球体、Rudinの3次元球体などがシェラブルでないが構成可能である例となっている (e.g., Hachimori[11])。

本稿の目的は構成可能でないようなPL球面をどうやって構築するかである。つまり、「構成可能な閉擬多様体」のクラスと「PL球面」のクラスのギャップの存在を示すことである。(閉でない場合、つまりPL球体で構成可能でないものについてはすでにHachimori[11] で2種類の例が特定されている。)

本稿ではまず3章で3次元の球面の三角形分割 (3次元の球面はすべてPLである) で構成可能でないものの存在を示し、さらに5章で高次元の場合にもPL球面で構成可能でないものが作れることを示すことになる。

1.5 その他の組合せ分割

本章の冒頭で構成可能性を「組合せ分割」の一つだと述べたが、シェラブルという概念も組合せ分割の1種である。この他にもいくつもの組合せ分割が知られている。本稿とは直接関係はないが、その中でも特に構成可能性およびシェラビリティーと関連のあるものについて簡単に紹介しておきたい。

定義 1.10. (頂点分解可能性)
純な単体的複体 C が**頂点分解可能** (vertex decomposable) であるとは、以下のどちらかの条件を満たす時である。

(i) C は単体である。

(ii) ある頂点 x について、$\mathrm{dl}_C(x)$ と $\mathrm{lk}_C(x)$ がともに頂点分解可能である。

ただし、

$$\begin{aligned}\mathrm{dl}_C(\sigma) &= \{\tau \in C : \tau \text{ は } \sigma \text{ を含まない}\}\\ \mathrm{lk}_C(\sigma) &= \{\tau \in C : \tau \cap \sigma = \emptyset \text{ かつ } \tau * \sigma \in C\}\end{aligned}$$

である。($\tau * \sigma$ とは、τ と σ の凸包、つまり τ と σ の頂点たちを頂点とする単体のこと。)

この頂点分解可能性という概念は Provan&Billera[19] で導入された。頂点分解可能な単体的複体はシェラブルであることが知られている。

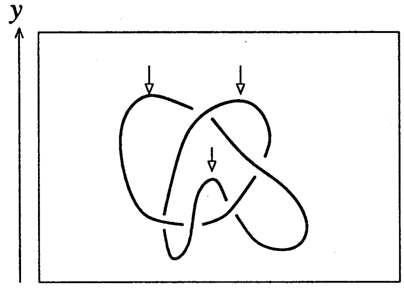
定義 1.11. (分割可能性) 単体的複体 C のファセット F に対してその面の一つ $\phi(F)$ を対応させる関数 ϕ を考えて、C を $\{G \in C : \phi(F) \subseteq G \subseteq F\}$ という集合で分割できるとき、C は**分割可能** (partitionable) であるという。

シェラブルな単体的複体はすべて分割可能である (e.g., Ziegler[26])。Cohen-Macaulay な単体的複体は分割可能であろうと予想されている (e.g., Stanley[23]) が、まだ未解決である。構成可能な単体的複体が分割可能であるか否かもまだ分かっていない。

2 結び目の橋指数とタングルの橋指数

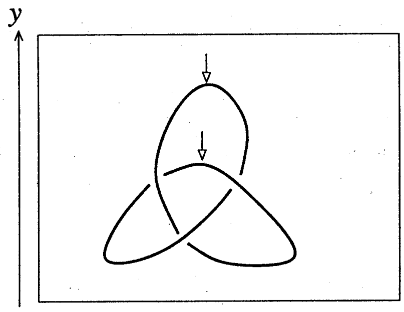
さて、本稿では 1.4節で述べたように PL 球面で構成可能でないものを構築するのが目的であるが、特に 3 次元球面の三角形分割 (3 次元球面はすべて PL である) で構成可能でないものを作っていく。その手法としては “複雑な” 結び目を “小さく”3 次元球面の中に埋め込むということを行なう。従って、結び目の複雑さを測る何らかの指標が必要である。結び目の複雑さを測るのに使える不変量はいろいろあるが、ここでは橋指数というものを考える。

定義 2.1. (結び目の橋指数)
結び目 K を xy 平面に射影して、y 軸方向の高さが極大になる点の個数を数える。すべての可能な射影についてのその最小値を**橋指数** (bridge index) とし、$b(K)$ と表記する。



橋指数についていくつかの簡単な事実を見ておきたい。

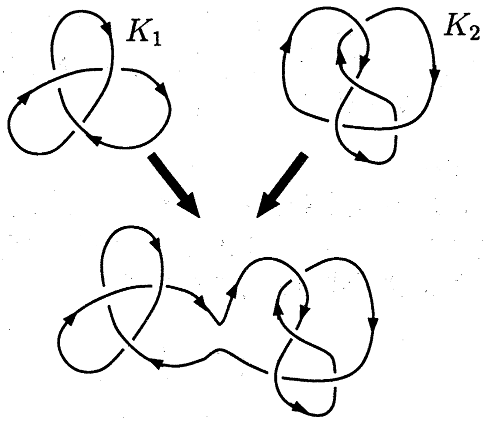
- 結び目に関しては、自明であることと橋指数が1であることは等価である。これは簡単に確かめられる。
(自明な結び目とは結ばっていない結び目のことであるが、3次元球体の境界(つまり2次元球面)に含まれることのできる結び目のことであるとも言える。)
- 三葉結び目は下図のように極大点が2つである射影を持っており、しかも自明ではないので橋指数は2である。



- 二つの結び目 K_1 と K_2 に対して連結和 $K_1\#K_2$ の橋指数は

$$b(K_1\#K_2) = b(K_1) + b(K_2) - 1$$

で与えられる。ただし、連結和とは次のようなもののことである。



$K_1\#K_2$

この事実は橋指数を初めに定義したSchubert自身によって示されている(Schubert[21])。

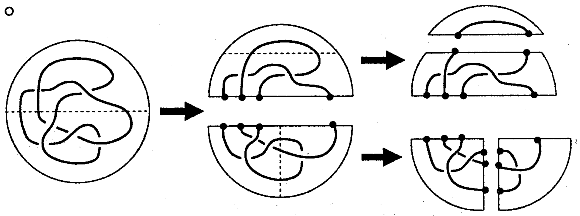
これらのことから次の命題は簡単に確認できる。

命題 2.2. 任意の $b \geq 1$ に対して、橋指数が b であるような結び目が必ず存在する。

(証明) 実際、$b-1$ 個の三葉結び目の連結和の橋指数が b になっている。 □

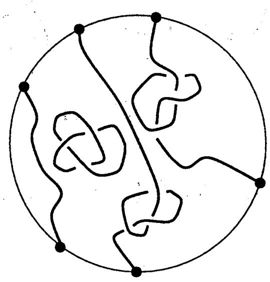
次の章でこの結び目の橋指数を基にして構成可能でない 3 次元球面の三角形分割を作るのであるが、どういうことをするかというと、3 次元球面の三角形分割 C が構成可能であるとして、その辺と頂点を使って結び目を作ることを考える。そしてその結び目の橋指数の上限を結び目に使った辺の数によって評価するのである。すると、もしその上限を越えるような複雑な結び目が埋め込まれていたら自動的にその三角形分割は構成可能でないことになるのである。

C が構成可能であるとすると命題1.9で述べられているように、C_1 と C_2 に分割されるときにその両者は共に構成可能な PL 球体であり、それらがまた二つの PL 球体に分割されて…、という具合になり、最終的に単体にまで分割されることになる。



従って C の中で辺と頂点を使って作られた結び目の橋指数を評価するためには、このような再帰的な分割の中で各ステップに現れる小さい PL 球体に含まれる結び目の断片がどのようなものであるかを観察していくことになる。こういったことをするためにはこの “結び目の断片” およびその橋指数といったものを定義してあげなければいけない。幸い、結び目の断片というものはタングルとしてよく知られているものである。

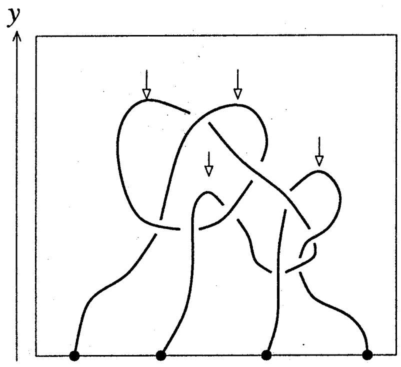
定義 2.3. (タングル)
3 次元球体に含まれる単純曲線でその両端が球体の境界に乗っているものを**張弦** (spanning arc) という。3 次元球体または球面に含まれるいくつかの互いに交わらない結び目および張弦の集合を**タングル** (tangle) という。



(普通、結び目やタングルはタングルの端点以外は球体の内部に含まれているとして議論するが、ここでは曲線部分が境界上にあってもよいことにしていることに注意しておく。そうしても境界上の曲線を微妙に球体の内部に移動させて考えれば通常の場合と全く同じように議論を進めることができる。)

一方、橋指数は結び目にしか定義されていないので、タングルの橋指数なるものを次のように定義することにする。

定義 2.4. (タングルの橋指数、Eherenborg&Hachimori[9])
タングル T を長方形の中に、張弦の端点は下辺にくるように射影する。そして結び目の橋指数の時と同様に極大点を数え、すべての可能な射影について最小値をとった値をタングルの橋指数と定義し、$b(T)$ と表記する。



タングルの場合の橋指数では、全体が球面の境界上に含まれるような張弦は橋指数にちょうど1の寄与をする。つまり、自明な結び目の場合と同じことになっていると考えられる。したがって、全体が球面の境界上にのるような（つまりそれぞれ結ばっていず、互いに絡まっていないような）タングルの橋指数は成分の数に等しいことになる。

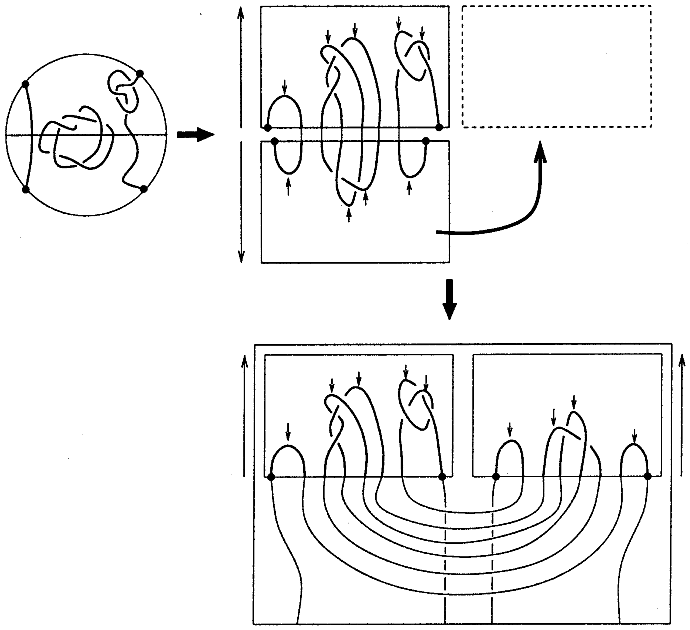
先に述べたようなこの概念を用いた構成可能性の議論は次章で行なうが、ここではこのタングルの橋指数に関する次の命題を紹介しておく。これが次の章の議論の鍵になる命題である。

命題 2.5. (Ehrenborg&Hachimori [9])
3次元球体 C がタングル T を含んでいるとする。この C がある円盤によって二つの3次元球体 C_1 と C_2 に切り分けられ、それぞれが $T_1 = T \cap C_1$、$T_2 = \overline{T - T_1}$ という T を切り分けたタングルを含んでいるとする。このとき、これらのタングルの橋指数の間に

$$b(T) \leq b(T_1) + b(T_2)$$

という関係式が成り立つ。

この命題の証明は Ehrenborg&Hachimori[9] の中で橋指数の別の定義法に基づいて与えてあるが、ここでは次に示す図によってなぜこの命題が成立するのかを説明することにする。



つまり、切り分けられた T_1 と T_2 のそれぞれに対して別々に極大点の数の最小化を行なって $b(T_1)$ と $b(T_2)$ を実現する射影をつくり、その二つから図のような手法で T の射影で極大点の数が $b(T_1)+b(T_2)$ を実現する射影を作ることができるのである。実際には T の射影は他にも考えられるのでさらに $b(T)$ はこうしてつくった射影の極大点の数よりも少なくなる可能性があるので $b(T) \leq b(T_1)+b(T_2)$ ということになるわけである。

3　3 次元球体・球面の構成可能性と結び目の橋指数

さて、この章ではいよいよ構成可能でないような 3 次元球面の三角形分割の存在を示す。示す定理は次のものである。

定理 3.1. (Ehrenborg&Hachimori[9])
3 次元球体または球面の三角形分割 C の中に辺と頂点を使って結び目 K を作る。この K の辺の数を $e(K)$ 本、橋指数を $b(K)$ とする。このとき、もし C が構成可能であれば

$$b(K) \leq e(K)$$

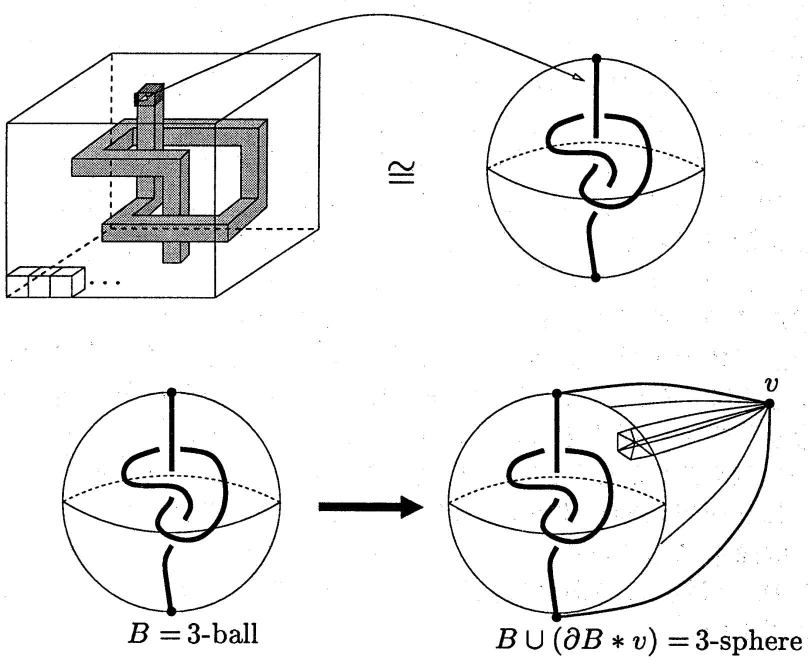
である。従って、もし $b(K) > e(K)$ であれば C は構成可能でない。

この定理から、橋指数の非常に大きい結び目を少ない辺数で3次元球面の三角形分割の中に埋め込むことができれば構成可能でないような三角形分割を作れることになり、特に3次元球面はPLであることが分かっているのでPL球面で構成可能でないものが作れることになるわけである。しかし、定理の条件を満たすような3次元球面の三角形分割が作れなくては定理を示しても意味がなくなってしまう。従って定理の証明を紹介する前にそのような三角形分割が作れることを見ておこう。

命題 3.2. 任意に結び目 k と $e \geq 3$ が与えられたら、k を e 辺で埋め込んでいる3次元球面または球体の三角形分割を作ることができる。

(証明)
この事実はLickorish[17]によって示されているが、実際はもっと古くから知られているものであるらしい。

ここでは結び目 k を3辺で埋め込んでいる3次元球面の三角形分割を作る方法を図示する。



まず、上側の図は球面の基になる3次元球体 B の作り方を示している。これはまず小さい立方体を積み重ねて大きい立方体を作ったものを考え、この大きい立方体の下の面から一つずつ小さい立方体を取り除くことによって穴をあけていく。このときに、図にあるように結び目の形に穴があくようにする。そして最終的に上の面から穴が抜けるようにするのであるが、最後の一つ、つまりトンネルが完成する直前でやめる。するとトンネルは貫通しないので全体は3次元球体のままである。こうしてできた小さい立方体の集合体をそれぞれの立方体を6個の四面体に分けることによって新たな頂点を導入することなく三角

形分割にすることができる。これで第一段階の完成で、ここで得られた3次元球体の三角形分割を B と名付けておくことにする。

このBの特徴的な点は図に太い線で示したような辺の存在である。左上に示した図の中の1辺は B を右上のように標準的な3次元球体に同相写像で移すことを考えると図のように結ばることになる。つまり、結ばった張弦が1辺で出来ているというものになるわけである。
(このような1辺で出来た張弦を持つ3次元球体の三角形分割はこれ自体シェラブルでないことがFurch[10]によって示され、さらに構成可能でもないことがHachimori[11]によって示されている。)

さて、この B を用いて3次元球面の三角形分割を作るのであるが、その構成法が下側の図である。これは何をしているかというと、B の外側に新しい頂点 v を導入し、B の境界にある三角形すべてから v に向けてコーンを作っているのである。つまり、B の境界上に $\{v_1, v_2, v_3\}$ を頂点とする三角形があったら $v \cup \{v_1, v_2, v_3\}$ の4点を頂点とする四面体を加えるのである。この操作を行なうと3次元球面が得られることはよく知られた事実である。
(B の外側に新たに付け加えられた四面体の全体は v を中心に B の境界である2次元球面に向けてコーンを作ったもの $\partial B * v$ であるから3次元球体になっており、従って全体は B と $\partial B * v$ という二つの3次元球体を全境界で張り合わせて得られるものであり、これは3次元球面である。)

このときに B で特徴的であると指摘した1辺からなる張弦とその両端点と v を結んでいる2辺を合わせた3本の辺を見てみると、ここに結び目が出来ていることが観察される。さらに、この結び目の形はどうやって決まっているかを考えると、実は B 中の張弦の形で決まっているのであり、さらにこれは初めにあけた穴の形そのものになっていることが分かる。つまり、初めに用意する大きい立方体を十分に大きいものとしておき、穴を開ける時に欲しい結び目 k の形の通りに穴を開けていけば最終的に k と同じ結び目を3辺で3次元球面の三角形分割の中に埋め込むことが出来るわけである。

こうして結び目 k を3辺で埋め込んだ3次元球面の三角形分割が得られたなら、これを適当に細分することによって $e\,(\geq 3)$ 辺からなる結び目を埋め込んだものは簡単に作れる。

球体の場合は、このあとで結び目に関係しないファセットを一つ取り除いてあげればよい。 □

さて、命題3.2(と命題2.2)によって非常に大きい橋指数の結び目が少ない辺数で埋め込まれた3次元球面の三角形分割を作ることができることがわかったので、いよいよ定理3.1の証明を紹介したい。これは命題2.5を用いて非常に簡潔に示すことができる。

(定理3.1の証明)
3次元球体または球面の構成可能な三角形分割である C のファセットの数による帰納法で示す。証明は結び目でなく一般にタングルの場合で証明する。

(1)
まずファセットが1つの時は、C は3次元球体であり、辺はすべてこの3次元球体の境界上にある。したがって辺と頂点を使ったタングル T の橋指数 $b(T)$ はこのタングル中の連結成分の数に等しい (定義2.4の後のコメント参照)。このことから T の辺数 $e(T)$ に関して $b(T) \le e(T)$ が成り立つことは容易に分かる。
(2)
ファセットの数が2以上のとき、C は構成可能性の定義1.2によって二つの構成可能な単体的複体 C_1 と C_2 に分割されるが、これらは命題1.9によって両者とも3次元球体であることがわかる。

C に含まれるタングル T に対して $T_1 = T \cap C_1$、$T_2 = \overline{T - T_1}$ と置くと、この T の T_1 と T_2 への分割はちょうど命題2.5の状況と同じになっていることが分かる。従って、

$$b(T) \le b(T_1) + b(T_2)$$

である。一方、C_1 と C_2 は C よりファセットの数が少ないので帰納法の仮定を使うことが出来、

$$b(T_1) \le e(T_1), \quad b(T_2) \le e(T_2)$$

である。これらと $e(T) = e(T_1) + e(T_2)$ という自明な関係式を用いれば、

$$b(T) \le e(T)$$

という結論が得られる。 □

系 3.3. 3次元球面 (または球体) の三角形分割で構成可能でないものが存在する。

(証明)
橋指数が4以上の結び目を命題3.2の方法で3辺で埋め込んだ3次元球面 (又は球体) の三角形分割を作ればよい。 □

付記. この系では定理3.1から結論を得るために橋指数が4以上の結び目を用いなければならず、例えば三葉結び目のような橋指数の小さいものでは結論を得るのに十分でないことになっている。しかし、実はHachimori&Ziegler[12]によって自明でない結び目が3辺で埋め込まれていると構成可能でなくなるということが示されているので、このように3辺で埋め込む場合には三葉結び目でも十分である。従って定理3.1は一見弱い定理のように見えるのであるが、しかし次の章で見るような強い性質を導くことができるのは定理3.1の方である。

付記. この定理の証明はそのまま多面体的分割や正則セル分割についても用いることができる。

4 重心分割

さて、前章では3次元球面の三角形分割で構成可能でないものが存在することを示したが、実は定理3.1は次のようにもっと強いことを示すことができる。

系 4.1. どんな自然数nを選んでも、n回重心細分しても構成可能でないような3次元球面または球体の三角形分割$C(n)$を作ることができる。

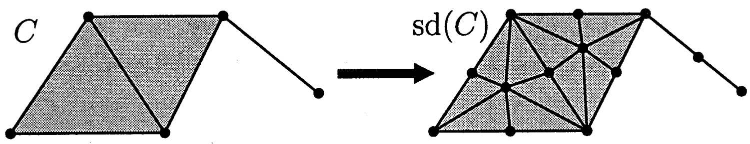
その前に、重心細分という概念について簡単な紹介をしたい。

定義 4.2. 単体的複体Cに対して、Cの$\emptyset$以外の各面σに対応する頂点v_σの集合を頂点集合とする単体的複体$\mathrm{sd}(C)$を

$$\mathrm{sd}(C) = \Big\{\{v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_t}\} \text{を頂点とする単体} : \emptyset \neq \sigma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_t \in C\Big\} \cup \{\emptyset\}$$

と定義し、これをCの**重心細分** (barycentric subdivision) という。

これは絵にすると次のようになっている。



つまりこの重心細分を取るという操作は幾何学的実現は変えずに、各単体を1次元のものは二つに、2次元のものは6個に、…、d次元のものは$(d+1)!$個に細分する操作である。

さて、系4.1の証明は次のようになる。

(系4.1の証明)
重心細分は1回について1辺を2つに分割するので、n回重心細分すると始めに1辺だったものは2^n辺に分割される。従って、橋指数が$3 \cdot 2^n + 1$以上であるような結び目が3辺で埋め込まれている3次元球面または球体$C(n)$を考えると、この結び目の辺数はn回の重心細分の後に$3 \cdot 2^n$なので、定理3.1によって構成可能でないことが示される。 □

この重心細分については、もしCが構成可能なら$\mathrm{sd}(C)$も構成可能である、という性質があることはほぼ自明に確かめることができる。では、Cが構成可能でない場合に重心細分を繰り返すことによっていつか構成可能にすることができるのであろうか？ というのは極自然な疑問である。感覚としては、重心細分をすることによってCを分割する方法の数が増えるので、構成可能でありやすくなるように思われる。(実際、重心細分というのは構造をなめらかにするために使われる手法である。)

しかし、例えば幾何学的実現がトーラスになっていたりPLでない球面であったりする場合、命題1.7から何回重心細分しても構成可能にはなり得ないことも分かる。従って、幾何学的実現が構成可能な細分を持ち得る場合に話を限る必要はある。特に擬多様体の場合を考えるならば、PL球体またはPL球面に限って次のような問題を考えることになろう。

予想 4.3. PL球面またはPL球体は有限回の重心細分の後に構成可能(さらにはシェラブル)になるだろう。

しかし、系4.1がこの問題の難しさを示していて、つまり、3次元という固定された次元に限った場合でも、もし予想が正しいとしても構成可能である状態にたどり着くために必要な重心細分の数を定数で与えることはできず、「有限回」としか言うことはできないのである。

5 高次元の場合

前々章と前章では3次元の球面および球体の場合を考えてきたが、それらの結果をそのまま4次元以上のPL球面およびPL球体のステートメントに置き換えることができる。そのためには各面のリンクに関する次のような性質に注目する必要がある。(リンクとは1.5章の定義1.10の中で与えてあるlkのことである。)

命題 5.1. (e.g., Björner[3], Hachimori&Ziegler[12])
構成可能な単体的複体Cの任意の面$\sigma \in C$に対してσのリンク$\mathrm{lk}_C(\sigma)$は構成可能である。

証明は非常に簡単で、CがC_1とC_2に分割された状態を考え、σがどちらか一方のみに含まれる時には$\mathrm{lk}_C(\sigma) = \mathrm{lk}_{C_i}(\sigma)$ ($i = 1$ or 2)であり、σがC_1とC_2の両者に含まれる時には

$$\begin{aligned}\mathrm{lk}_{C_1}(\sigma) \cup \mathrm{lk}_{C_2}(\sigma) &= \mathrm{lk}_{C_1 \cup C_2}(\sigma) \ \ (= \mathrm{lk}_C(\sigma)) \\ \mathrm{lk}_{C_1}(\sigma) \cap \mathrm{lk}_{C_2}(\sigma) &= \mathrm{lk}_{C_1 \cap C_2}(\sigma)\end{aligned}$$

という関係が成り立つということを用いてファセットの数と次元の帰納法を用いればよいだけである。

さて、3次元球体や3次元球面をもとに高次元の球体や球面を作るのには次のピラミッドとサスペンションという操作を用いる。

定義 5.2. 単体的複体Cに対して新しい頂点vを付け加えて作った単体的複体

$$\mathrm{Pyr}(C) = \{v * \sigma : \sigma \in C\} \cup C \cup \{\emptyset\}$$

を C 上のピラミッド (pyramid) といい、2 頂点 v, w を付け加えて作った単体的複体

$$\Sigma(C) = \{v * \sigma : \sigma \in C\} \cup \{w * \sigma : \sigma \in C\} \cup C \cup \{\emptyset\}$$

を C のサスペンション (suspension) という。ただし、$v*\sigma$ は v と σ の頂点集合の張る単体のことである。

ここで簡単であるが重要な性質が次の命題である。

命題 5.3. (e.g., Zeeman[25])

- C が d 次元 PL 球体であれば $\mathrm{Pyr}(C)$ は $d+1$ 次元 PL 球体である。
- C が d 次元 PL 球面であれば $\Sigma(C)$ は $d+1$ 次元 PL 球面である。

特に 3 次元以下の球体や球面はすべて PL であるので、3 次元以下の球体や球面からはじめてピラミッド又はサスペンションを繰り返していけば高次元の PL 球体や PL 球面の列が得られることになる。

さて、ここで注目したいのは $\mathrm{Pyr}(C)$ や $\Sigma(C)$ において新しく付け加えられる頂点 v(または w) におけるリンクは C そのものになっているという点である。このことと命題 5.1から次の系が示される。

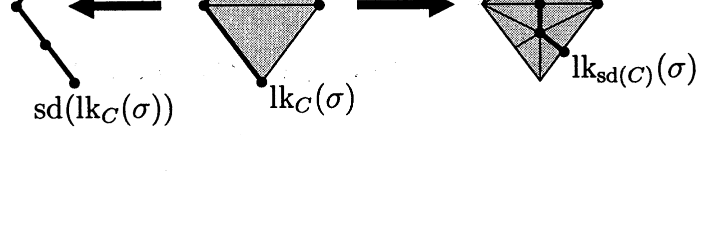
系 5.4. 任意の $d \geq 3$ に対して構成可能でない d 次元の PL 球体および PL 球面が存在する。

(証明)
系 3.3でつくった構成可能でない 3 次元球面または球体の三角形分割を C_3 とし、球面の場合はサスペンション、球体の場合はピラミッドを作る。すると 1 次元高い C_4 が得られるが、この時に $\mathrm{lk}_{C_4}(v) = C_3$ であることから $\mathrm{lk}_{C_4}(v)$ は構成可能でなく、従って命題 5.1から C_4 も構成可能でない。これを $d-3$ 回繰り返せば構成可能でない d 次元 PL 球体または PL 球面が得られる。 □

前章のようにさらに強く重心細分に関するステートメントまで高次元の場合に含めるためには次の関係式を見ればよい。

$$\mathrm{sd}(\mathrm{lk}_C(\sigma)) = \mathrm{lk}_{\mathrm{sd}(C)}(\sigma).$$

ただし、σ は頂点で、また、ここでの等号は同型という意味の等号である。



つまり、重心細分をとる操作とリンクをとる操作は可換なのである。

系 5.5. 任意の $d \geq 3$ と $n \geq 1$ に対して n 回重心細分しても構成可能でない d 次元の PL 球体および PL 球面が存在する。

(証明)
系 4.1で与えた n 回重心細分しても構成可能でないような 3 次元球体または球面を $C_3(n)$ とし、これのピラミッド又はサスペンションを $C_4(n)$ とする。すると n 回の重心細分に関して

$$\mathrm{lk}_{\mathrm{sd}^n(C_4(n))}(v) = \mathrm{sd}^n(\mathrm{lk}_{C_4(n)}(v)) = \mathrm{sd}^n(C_3(n))$$

という関係が成り立つので、$C_3(n)$ が n 回重心細分しても構成可能でなかったことから $\mathrm{lk}_{\mathrm{sd}^n(C_4(n))}(v)$ は構成可能でないことになる。したがって命題 5.1によって $C_4(n)$ は構成可能でない。これを $d-3$ 回繰り返せば n 回重心細分後も構成可能でない d 次元 PL 球体または PL 球面 $C_d(n)$ が得られる。 □

References

[1] R. H. Bing, Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré Conjectur e, in "Lectures on Modern Mathematics II", (T. L. Saaty ed.), Wiley (1964), 93-128.

[2] A. Björner, Posets, regular CW complexes and Bruhat order, Europ. J. Combinatorics, **5** (1984), 7-16.

[3] A. Björner, Topological methods, in "Handbook of Combinatorics", (R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász eds.), North-Holland (1995), 1819-1872.

[4] A. Björner & M. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. I, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 1299-1327.

[5] A. Björner & M. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. II, Trans. Amer. Math. Soc., **349** (1997), 3945-3975.

[6] H. Bruggesser & P. Mani, Shellable decompositions of cells and spheres, Math. Scand., **29** (1971), 197-205.

[7] J. W. Cannon, Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three, Ann. Math., **110** (1979), 83-112.

[8] R. D. Edwards, The double suspension of a certain homology 3-sphere is S^3, Notices Amer. Math. Soc., **22** (1975), A 334. Abstract #75 T-G 33.

[9] R. Ehrenborg & M. Hachimori, Non-constructible complexes and the bridge index, preprint. 1999

[10] R. Furch, Zur grundlegung der kombinatorischen topologie, Abh. Math. Sem. Hamb. Univ., **3** (1924), 69-88.

[11] M. Hachimori, Nonconstructible simplicial balls and a way of testing constructibility, Discrete Comput. Geom., **22** (1999), 223-230.

[12] M. Hachimori & G. M. Ziegler, Decompositions of balls and spheres with knots consisting of few edges, to appear in Math. Z.

[13] Takayuki Hibi, "Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes", Carlslaw Publications, 1992.

[14] 日比孝之「可換代数と組合せ論」シュプリンガー・フェアラーク東京 (1996).

[15] P. McMullen The maximum numbers of faces of a convex polytope Mathematika 17 1970 179-184

[16] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and p olytopes, Ann. Math., **96** (1972), 318-337.

[17] W. B. R. Lickorish, Unshellable triangulations of spheres, Europ. J. Combinatorics, **12** (1991), 527-530.

[18] J. R. Munkres, Topological results in combinatorics, Michigan Math. J., **31** (1984), 113-128.

[19] J. S. Provan & L. J. Billera, Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra , Math. Operations Research, **5** (1980), 576-594.

[20] G. A. Reisner, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Advances in Math., **21** (1976), 30-49.

[21] H. Schubert, Über eine numerische Knoteninvariante, Math. Z., **61** (1954), 245-288.

[22] R. P. Stanley, The Upper Bound Conjecture and Cohen-Macaulay rings, Studies in Applied Math., **54** (1975), 135-142.

[23] R. P. Stanley, "Combinatorics and Commutative Algebra, Second Edition", Birkhäuser, 1996.

[24] 田村一郎「トポロジー」岩波全書 (1972).

[25] E. C. Zeeman, "Seminar on Combinatorial Topology, Fascicule 1 (Exposés I à V inclus)", Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1963.

[26] G. M. Ziegler, "Lectures on Polytopes", Springer-Verlag, 1994, Second revised printing 1998.